

LAHENDUSED 10.KLASS

1. Vastus: 12 min

Lahendus:

Olgu teine kraan avatud $x + 2$ minutit ja esimene x minutit. Siis kogu lahuse hulk, mis selle aja möödumisel on tünni kogunenud, on $800 + 100 \cdot (x + 2) + 200 \cdot x = 1000 + 300x$ kg, millest puhast ainet on seal

$$0,1 \cdot 800 + 0,12 \cdot 100 \cdot (x + 2) + 0,05 \cdot 200 \cdot x = 80 + 12(x + 2) + 10x = 104 + 22x \text{ kg.}$$

Arvestame vastavusi:

$$1000 + 300x \quad - \quad 100\%$$

$$104 + 22x \quad - \quad 8\%$$

$$\text{Siit } 8 \cdot (1000 + 300x) = 100(104 + 22x) \text{ ehk } x = 12.$$

Või arvestades asjaolu, et vajalik lahus on 8%line, saame võrrandi

$$104 + 22x = 0,08 \cdot (1000 + 300x), \text{ kust } x = 12.$$

Hindamine:

Arvestades kraanide lahtiolekuaegasid, vajaliku kontsentratsiooni saavutamisel tünni kogunenud lahuse koguse avaldamine

2p

Arvestades kraanide lahtiolekuaegasid, vajaliku kontsentratsiooni saavutamisel tünni kogunenud lahuses „puhta aine“ koguse avaldamine

3p

Vajaliku võrrandi või seose koostamine ja aja leidmine

2p

Ainult õige vastuse eest anda 1p

7p

2. Vastus. $a^2 + 4a + 9$ on täisarvu ruut parajasti siis, kui $a = -4$ või $a = 0$.

Lahendus:

Teame, et $a^2 + 4a + 9$ on täisarvu ruut parajasti siis, kui leiduvad täisarvud a ja x nii, et

$$a^2 + 4a + 9 = x^2.$$

Teisenadme võrrandit $a^2 + 4a + 9 = x^2$:

$$(a + 2)^2 + 5 = x^2$$

$$x^2 - (a + 2)^2 = 5$$

$$(x - a - 2)(x + a + 2) = 5$$

Kuna otsitavad a ja x on mõlemad täisarvud, siis ka $x - a - 2$ ja $x + a + 2$ on mõlemad täisarvud. Seega on neli võimalust, millal nende korrutis on 5:

1.) $x - a - 2 = 5$ ja $x + a + 2 = 1$, millest $x = 3$ ja $a = -4$

2.) $x - a - 2 = 1$ ja $x + a + 2 = 5$, millest $x = 3$ ja $a = 0$

3.) $x - a - 2 = -5$ ja $x + a + 2 = -1$, millest $x = -3$ ja $a = 0$

4.) $x - a - 2 = -1$ ja $x + a + 2 = -5$, millest $x = -3$ ja $a = -4$

Hindamine:

Saadud võrrand $a^2 + 4a + 9 = x^2$: 1p

Teisendatud võrrand kujule $(x - a - 2)(x + a + 2) = 5$: 3p

Järeldatud, et $x - a - 2$ ja $x + a + 2$ on mõlemad täisarvud: 1p

Leitud õiged vastused: 2p

7p

Ainult õige vastuse eest anda 1p.

3. Vastus: Sobivad täisarvude paarid (1, 0), (-1, 0) ja (0, 1).

Lahendus:

Märkame, et $a^2 + b^2 = 0$ korral ei ole tegemist ruutvõrrandiga, seega seda juhtu ei ole vaja vaadata. Jagame võrrandi läbi $(a^2 + b^2)$ -ga:

$$x^2 + \frac{a}{a^2 + b^2}x - \frac{3ab + b}{a^2 + b^2} = 0$$

Rakendades Viete' teoreemi saame:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{a^2 + b^2} \text{ ja } x_1 x_2 = -\frac{3ab + b}{a^2 + b^2}.$$

Kuna mõlemad lahendid x_1 ja x_2 on täisarvud, siis ka $x_1 + x_2$ on täisarv ehk $\frac{a}{a^2 + b^2}$ on täisarv. Nüüd vaatame kahte erinevat juhtu:

1) Kui $a \neq 0$, siis sellest, et $\frac{a}{a^2 + b^2}$ on täisarv järeldub, et $|a| \geq |a^2 + b^2| = a^2 + b^2$. Samas teame, et kui $|a| \geq 2$, siis $|a| < a^2 \leq a^2 + b^2$ ehk võrratus $|a| \geq a^2 + b^2$ ei kehti. Seega $|a| < 2$, ja kuna a on nullist erinev täisarv, siis järelikult $a = \pm 1$. Võrratus saab kuju $1 \geq 1 + b^2$, mis kehtib parajasti siis kui $b = 0$. Seega saame sobivad paarid (1,0) ja (-1,0).

2) Kui $a = 0$, siis algne võrrand saab kuju $x^2 - \frac{1}{b} = 0$, millest saame $x = \pm \sqrt{\frac{1}{b}}$. Arv $\sqrt{\frac{1}{b}}$ on täisarv parajasti siis, kui $b = 1$. Seega saame lisaks sobiva täisarvude paari (0,1)

Hindamine:

Võrrandi teisendamine kujule $x^2 + \frac{a}{a^2 + b^2}x - \frac{3ab + b}{a^2 + b^2} = 0$ (sealhulgas märgatud, et kui $a^2 + b^2 = 0$, siis pole tegemis ruutvõrrandiga): 1p

Rakendatud Viete' teoreemi: 2p

Järeldatud, et $\frac{a}{a^2 + b^2}$ on täisarv: 1p

Läbi töötatud juht, kus $a \neq 0$ ja leitud vastavad õged vastused: 2p

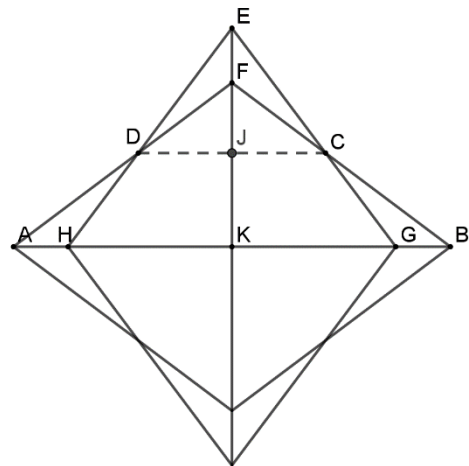
Läbi töötatud juht, kus $a = 0$ ja leitud vastavad õged vastused: 1p
7p

Ainult õige vastuse eest anda 1p.

4. Vastus: $S = 20\frac{4}{7} \text{ cm}^2$

Lahendus:

Kujundi pindala on kaks korda suurem trapetsi $HGCD$ ja kolmnurga CDF pindalade summast. Trapetsi ja kolmnurga ühise aluse CD ning nende kõrguste KJ ja JF leidmiseks kasutame kolmnurkkade sarnasust:



$$\triangle EJC \sim \triangle EKG \text{ (NN)} \Rightarrow \frac{EJ}{JC} = \frac{EK}{KG};$$

$$\triangle FJC \sim \triangle FKB \text{ (NN)} \Rightarrow \frac{FJ}{JC} = \frac{FK}{KB}.$$

Tähistades siin $JC = x$ ja $JK = y$, saame järgmised võrrandid:

$$\frac{4-y}{x} = \frac{4}{3} \text{ ja } \frac{3-y}{x} = \frac{3}{4}. \text{ Lahendades võrrandisüsteemi, leiame } x = y = \frac{12}{7}.$$

Seega on kujundi pindala

$$S = 2 \cdot \left(\frac{HG + CD}{2} \cdot JK + \frac{CD \cdot FJ}{2} \right) = (HG + CD) \cdot JK + CD \cdot (FK - JK) =$$

$$HG \cdot JK + CD \cdot FK = 6 \cdot \frac{12}{7} + \frac{24}{7} \cdot 3 = \frac{144}{7} = 20\frac{4}{7} (\text{cm}^2).$$

Märkus. Kasutada saab ka sirge võrrandeid punkti C koordinaatide leidmiseks.

Hindamine:

| | |
|---|-----------|
| Õige konstruktsioon | 1p |
| Vajalike lõikude leidmiseks võrrandite koostamine (sh kolmnurkkade sarnasuse põhjendus) | 2p |
| Võrrandisüsteemi lahendamine ja vajalike lõikude leidmine | 2p |
| Pindala leidmine | <u>2p</u> |
| | 7p |

5. Vastus: ei ole võimalik

Lahendus:

Oletame, et meil on 2017 positiivset täisarvu, mille korral ülesande tingimused kehtivad.

Kui kõik arvud on paarisarvud, siis me saame need arvud jagada kahega, ja esialgsed tingimused jäävad ikka kehtima. Võime seda teha niikaua, kuni vähemalt üks arv on paaritu. Kuna temast kahe naaberarvu summa või vahe peab olema paaritu arv, siis üks nendest arvudest on paaris ja teine paaritu. Seega selgub, et sellises arvude kolmikus peab paarisarvule järgnema kaks paaritut arvu, millele omakorda jällegi paarisarv ja kaks paaritut arvu. Seega peab mistahes vaadeldavas järjestikuste arvude kolmikus olema täpselt kaks paaritut ja üks paarisarv. Kuna arv 2017 ei jagu kolmega, siis tekib olukord, kus kolm järjestikust arvu on kas paaritud või kolmest järjestikusest arvust 2 on paaris. Kummalgi korral ei oleks ülesande tingimused täidetud

Hindamine:

Näitamine, et kui kõik arvud on paaris, siis saab neid jagada kahega 2p

Selgitamine, et vähemalt üks arv on paaritu 1p

Näitamine, et tingimuse saamiseks kolme järjest oleva arvu seast peab olema täpselt 2 paaritut arvu ja täpselt 1 paaris arv. 2p

Näitamine, et 2017 ei jagu kolmega ja seetõttu vastuseks on: **Ei** 2p
7p

Ainult õige vastuse eest anda 0p.